

الدوال المسترسلة

أولاً: الدالة الأسية

تعريف الدالة الأسية العامة:

تسمى الدالة $y = f(x) = a^x$ دالة أسية عامة حيث $a \neq 1$ و a عدد حقيقي موجب مجالها $R = (-\infty, \infty)$ و مداها $(0, \infty)$.

تعريف الدالة الأسية الطبيعية:

تسمى الدالة $y = f(x) = e^x$ دالة أسية طبيعية ويسمى e بالأساس الطبيعي ويساوي $e \simeq 2.7182$ مجالها $R = (-\infty, \infty)$ و مداها $(0, \infty)$.

مثال:

حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل دوالاً أسية أم لا.

1) $f(x) = x^5$

2) $f(x) = 4^x$

3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4) $f(x) = x^x$

5) $f(x) = 3^x - x$

الحل

1) $f(x) = x^5$

لا تمثل دالة أسية

2) $f(x) = 4^x$

تمثل دالة أسية

3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

تمثل دالة أسية

4) $f(x) = x^x$

لا تمثل دالة أسية

5) $f(x) = 3^x - x$

لا تمثل دالة أسية

خواص الدالة الأسية العامة:

$$1. \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$2. \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$3. \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$4. \quad (a b)^x = a^x b^x$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$6. \quad (a)^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$7. \quad a^0 = 1$$

خواص الدالة الأسية الطبيعية:

$$1. \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

$$2. \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$3. \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

$$4. \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$5. \quad e^0 = 1$$

ثانياً: الدالة اللوغاريتمية

تعريف الدالة اللوغاريتمية العامة:

تسمى الدالة $y = f(x) = \log_a x$ دالة لوغاريتمية عامة حيث $a \neq 1$ و $a > 0$.
مجالاتها $(0, \infty)$ و مداها $R = (-\infty, \infty)$.

ملاحظة:

إذا كانت $a = 10$ فإن الدالة اللوغاريتمية العامة تكتب على الصورة

$$y = \log_{10} x = \log x$$

تعريف الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

تسمى الدالة $y = f(x) = \log_e x = \ln x$ دالة لوغاريتمية طبيعية حيث e هو الأساس الطبيعي ويساوي $e \simeq 2.7182$.

مجالاتها $(0, \infty)$ و مداها $R = (-\infty, \infty)$.

خواص الدالة اللوغاريتمية العامة:

$$1. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \log_a x^n = n \log_a x$$

$$4. \log_a a = 1$$

$$5. \log_a(1) = 0$$

$$6. \log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3. $\ln x^n = n \ln x$

4. $\ln e^x = x$

5. $e^{\ln x} = x$

6. $\ln e = 1$

7. $\ln 1 = 0$

8. $\ln x = y$ فإن $x = e^y$ إذا كان:

مثال: أوجد قيمة ما يلي

1. $\log_7 1 = 0$
2. $\log_5 5 = 1$
3. $\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4 \log_2(2) = 4(1) = 4$
4. $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3 \log_5(5) = 3(1) = 3$
5. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^3}\right) = \log_3(3^{-3}) = -3 \log_3(3) = -3$
6. $\log 0.01 = \log\left(\frac{1}{100}\right) = \log\left(\frac{1}{10^2}\right) = \log(10^{-2}) = -2 \log(10) = -2$

مثال: أوجد قيمة ما يلي

1. $\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3 3^4 - \log_3 3^2 = 4 \log_3 3 - 2 \log_3 3 = 4 - 2$
2. $\ln 4 + \ln 5 = \ln(4)(5) = \ln 20$
3. $\ln 14 - \ln 7 = \ln\left(\frac{14}{7}\right) = \ln 2$
4. $\log_2 32 - \log_6 36 + \log_7 49 = \log_2 2^5 - \log_6 6^2 + \log_7 7^2$
 $= 5 \log_2 2 - 2 \log_6 6 + 2 \log_7 7$
 $= 5 - 2 + 2 = 5$

مثال: أوجد قيمة ما يلي

1. $\log_5 125 - \log_5 25 = \log_5 5^3 - \log_5 5^2 = 3 \log_5 5 - 2 \log_5 5 = 3 - 2 = 1$

2. $\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3 3^4 - \log_3 3^2 = 4 \log_3 3 - 2 \log_3 3 = 4 - 2 = 2$