

أولاً: دالة كثيرة الحدود

تعريف:

الدالة كثيرة الحدود هي الدالة التي على الصورة

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in R$

حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر، n تسمى درجة كثيرة الحدود.

ومجال جميع كثيرات الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية

$$R = (-\infty, \infty)$$

ملاحظة 1:

تسمى الدالة $y = f(x) = a$ دالة ثابتة حيث $a \in R$ ودرجتها تساوي صفر.

ملاحظة 2:

تسمى الدالة $y = f(x) = ax + b$ حيث $a, b \in R$ و $a_n \neq 0$ دالة خطية ودرجتها تساوي 1 .

ملاحظة 3:

تسمى الدالة $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in R$ و $a \neq 0$ دالة تربيعية ودرجتها تساوي 2 .

ملاحظة 4:

تسمى الدالة $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a, b, c, d \in R$ و $a \neq 0$ دالة تكعيبية ودرجتها تساوي 3 .

مثال:

حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل كثيرات حدود أم لا.

1) $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + 1$

2) $f(x) = 7x^2 + 12\sqrt{x}$

3) $f(x) = 2x^{-2} - 3$

الحل

1) $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + 1$

تمثل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

2) $f(x) = 7x^2 + 12\sqrt{x}$

لا تمثل كثيرة حدود

3) $f(x) = 2x^{-2} - 3$

لا تمثل كثيرة حدود

مثال:

حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل كثيرات حدود أم لا.

1) $f(x) = 7$

2) $f(x) = x - 1$

3) $f(x) = 3x^2 - 4x$

4) $f(x) = x^3 + 6$

الحل

1) $f(x) = 7$

دالة ثابتة ومن الدرجة الصفرية

2) $f(x) = x - 1$

دالة خطية ومن الدرجة الأولى

3) $f(x) = 3x^2 - 4x$

دالة تربيعية ومن الدرجة الثانية

3) $f(x) = x^3 + 6$

دالة تكعيبية ومن الدرجة الثالثة

ثانياً: دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

تعريف:

- تسمى الدالة $y = |f(x)|$ دالة المقياس حيث $f(x)$ دالة كثيرة حدود
- مجال دالة المقياس هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$
- ومداهها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$

مثال:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{الدالة}$$

تسمى دالة القيمة المطلقة للمتغير x .

ثالثاً: الدالة الكسرية

تعريف:

• تسمى الدالة $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة كسرية حيث $f(x)$ و $g(x)$ دوال كثيرات حدود

• مجال تعريفها دائماً مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ما عدا قيم x التي تجعل المقام $g(x) = 0$ أي أن المجال هو

$$R - \{x: g(x) = 0\} = R - \{\text{أصفار المقام}\}$$

لإيجاد مجال الدالة الكسرية نتبع الخطوات التالية:

- (1) نساوي المقام بالصفر
- (2) نحل المقام إذا احتجنا لذلك
- (3) نوجد قيم x التي تجعل المقام = صفر
- (4) المجال = $R - \{\text{أصفار المقام}\}$

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \frac{x}{x+1}$ تمثل دالة كسرية؟ وما هو مجالها؟

الحل

الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ تمثل دالة كسرية. ومجالها هو $R - \{-1\}$

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \frac{x^2+5x-3}{x^3-1}$ تمثل دالة كسرية؟ وما هو مجالها؟

الحل

الدالة $f(x) = \frac{x^2+5x-3}{x^3-1}$ تمثل دالة كسرية. ومجالها هو $R - \{1\}$

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x+5}$ تمثل دالة كسرية؟

الحل

الدالة $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x+5}$ لا تمثل دالة كسرية.

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3+7}}$ تمثل دالة كسرية؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3+7}}$ لا تمثل دالة كسرية.

رابعاً: الدالة الجذرية

تعريف:

• تسمى الدالة $y = f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ دالة جذرية بحيث $f(x)$ كثيرة حدود و
 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

• مجال تعريفها هو جميع قيم x بحيث $f(x) \geq 0$ وذلك عندما n عدد زوجي

• مجال تعريفها هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ وذلك عندما n عدد فردي

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$ تمثل دالة جذرية؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$ تمثل دالة جذرية.

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$ تمثل دالة جذرية؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$ لا تمثل دالة جذرية.

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt{x+3}$ تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ تمثل دالة جذرية. ومجالها يكون عندما

$$x + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$$

المجال = $[-3, \infty)$

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt{x - 5}$ تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{x - 5}$ تمثل دالة جذرية. ومجالها يكون عندما

$$x - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 5$$

$$\text{المجال} = [5, \infty)$$

مثال:

هل الدالة التالية $f(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ تمثل دالة جذرية.

$$\text{المجال} = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}$$