

معادلات الخط المستقيم

3.3

أولاً: الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

تعريف:

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in R \quad (a \neq 0 \text{ أو } b \neq 0 \text{ بحيث})$$

تعريف:

ميل الخط المستقيم $ax + by + c = 0$ يعطى بالعلاقة $m = -\frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$.

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $4x - 2y = 1$

الحل

ميل الخط المستقيم $ax + by + c = 0$ هو $m = -\frac{a}{b}$

إذاً نجد من معادلة الخط المستقيم $4x - 2y - 1 = 0$ أن

$$a = 4, \quad b = -2$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\left(\frac{4}{-2}\right) = 2$$

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $5y + 3x + 3 = 0$

الحل

ميل الخط المستقيم $ax + by + c = 0$ هو $m = -\frac{a}{b}$

إذاً نجد من معادلة الخط المستقيم $5y + 3x + 3 = 0$ أن

$$a = 3, \quad b = 5$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

تعريف:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يعطى بالعلاقة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(2, 3)$ و $(-2, 7)$

الحل

نفرض أن

$$(x_2, y_2) = (-2, 7) \quad \text{و} \quad (x_1, y_1) = (2, 3)$$

إذاً ميل الخط المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(7) - (3)}{(-2) - (2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(-8, 10)$ و $(-3, -5)$

الحل

نفرض أن

$$(x_2, y_2) = (-8, 10) \text{ و } (x_1, y_1) = (-3, -5)$$

إذاً ميل الخط المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(10) - (-5)}{(-8) - (-3)} = \frac{15}{-5} = -3$$

ثانياً: الصور المختلفة لمعادلات الخط المستقيم

1- معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من محور Y

تعريف:

من الصور العامة لمعادلة الخط المستقيم $y = mx + c$ حيث أن m هي ميل المستقيم و c هي الجزء المقطوع من محور الصادات Y .

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $y = 3x - 1$

الحل

ميل الخط المستقيم $y = mx + b$ هو m

إذاً ميل الخط المستقيم $y = 3x - 1$ هو $m = 3$.

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = 2$ ويقطع جزءاً طوله 3 من الجزء الموجب لمحور الصادات Y

الحل

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع جزءاً طوله c من الجزء الموجب لمحور الصادات Y هي $y = mx + c$

وحيث أن $m = 2$ و $c = 3$ وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم هي

$$y = 2x + 3$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = -\frac{1}{2}$ ويقطع جزءاً طوله -6 من محور Y

الحل

بما أن $m = -\frac{1}{2}$ و $c = -6$ ، وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم هي

$$y = -\frac{1}{2}x - 6$$

مثال:

إذا كانت معادلة الخط المستقيم $y = -4x + 7$. فأوجد :

(1) ميل الخط المستقيم
(2) الجزء المقطوع من محور Y

الحل

إذا كانت معادلة الخط المستقيم المعطاة على الصورة العامة $y = mx + c$

إذاً فإن (1) ميل الخط المستقيم $(m) = -4$

(2) الجزء المقطوع من محور Y $(c) = 7$

2- معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله ونقطة واقعة عليه

تعريف:

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وميله يساوي m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(1, -4)$ وميله $m = -1$.

الحل

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وميله يساوي m يعطى بالمعادلة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (1, -4)$ و $m = -1$ معادلة المستقيم هي

$$y - (-4) = -1(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + 4 = -x + 1$$

$$\Rightarrow y = -x + 1 - 4$$

$$\Rightarrow y = -x - 3$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(-2, -3)$ وميله $m = 5$.

الحل

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وميله يساوي m يعطى بالمعادلة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (-2, -3)$ و $m = 5$
معادلة المستقيم هي

$$y - (-3) = 5(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 3 = 5(x + 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = 5x + 10$$

$$\Rightarrow y = 5x + 10 - 3$$

$$\Rightarrow y = 5x + 7$$

3- معادلة الخط المستقيم بدلالة نقطتين عليه

تعريف:

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعطى بالعلاقة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1, -4)$ و $(2, 1)$

الحل

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعطى بالعلاقة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (-1, -4)$ و $(x_2, y_2) = (2, 1)$ معادلة المستقيم هي

$$\frac{y - (-4)}{x - (-1)} = \frac{(1) - (-4)}{(2) - (-1)} \Rightarrow \frac{y + 4}{x + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3(y + 4) = 5(x + 1) \Rightarrow 3y + 12 = 5x + 5$$

$$\Rightarrow 3y - 5x + 7 = 0$$

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(2,1)$ و $(3, - 8)$

الحـلـ

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعطى بالعلاقة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (2, 1)$ و $(x_2, y_2) = (3, - 8)$

معادلة المستقيم هي

$$\frac{y - (1)}{x - (2)} = \frac{(-8) - (1)}{(3) - (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{y - 1}{x - 2} = \frac{-9}{1}$$

$$\Rightarrow 1(y - 1) = -9(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -9x + 18$$

$$\Rightarrow y = -9x + 19$$

or

$$\Rightarrow 9x + y - 19 = 0$$

ملاحظة:

(1) معادلة محور X هي $y = 0$

(2) معادلة محور Y هي $x = 0$

4- معادلة المستقيم الأفقي

تعريف:

معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور X ويبعد عنه مسافة مقدارها a هي:

$$y = a$$

5- معادلة المستقيم الرأسى

تعريف:

معادلة الخط المستقيم الرأسى الموازي لمحور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها b هي:

$$x = b$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور X ويبعد عنه مسافة مقدارها 5 .

الحل

معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور X ويبعد عنه مسافة مقدارها a هي $y = a$

إذاً معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور X ويبعد عنه مسافة مقدارها 5 هي $y = 5$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الرأسي الموازي لمحور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها -3

الحل

معادلة الخط المستقيم الرأسي الموازي لمحور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها b هي $x = b$

إذاً معادلة الخط المستقيم الرأسي الموازي لمحور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها -3 هي $x = -3$

6- معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محوري X ، Y بمقادير a ، b على الترتيب

تعريف:

معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محوري X و Y بمقادير a و b على الترتيب تعطى بالعلاقة

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار الذي يقطع الجزأين 3 و 2 من محوري X و Y على الترتيب

الحل

معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محوري X و Y بمقادير a و b على الترتيب تعطى بالعلاقة

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

إذاً معادلة المستقيم هي

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 6$$

الموازي والعمودي

تعريف:

يقال أن المستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل، أي أنه إذا كان ميل المستقيم الأول هو m_1 وميل المستقيم الثاني m_2 فإن

$$m_1 = m_2$$

مثال:

أوجد ميل المستقيم الموازي للمستقيم $y + 3x + 7 = 0$

الحل

ميل الخط المستقيم المعطى $y + 3x + 7 = 0$ هو $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{1} = -3$

إذاً ميل الخط المستقيم الموازي له هو $m_2 = m_1 = -3$

تعريف:

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان ميل أحدهما هو مقلوب الآخر بإشارة مختلفة. أي أنه إذا كان ميل المستقيم الأول هو m_1 وميل المستقيم الثاني m_2 فإن

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{أو} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{أو} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

مثال:

أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم $y + 2x - 12 = 0$

الحل

ميل الخط المستقيم المعطى $y + 2x - 12 = 0$ هو $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$

إذاً ميل الخط المستقيم العمودي عليه هو

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة هامة:

يتعامد مستقيمان إذا كان حاصل ضرب ميلهما $= -1$

تعريف:

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي المستقيم $y = mx + b$ هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(-2, 1)$ ويوازي المستقيم $y = -2x + 3$

الحل

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي المستقيم $y = mx + b$ هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ وميل المستقيم $y = -2x + 3$ هو $m = -2$

إذاً معادلة المستقيم هي

$$y - 1 = -2(x - (-2))$$

$$y - 1 = -2(x + 2)$$

$$y - 1 = -2x - 4$$

$$2x + y + 3 = 0$$

تعريف:

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وعمودي على المستقيم $y = mx + b$ هي:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(3, -5)$ وعمودي على المستقيم $y + 2x + 3 = 0$.

الحل

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وعمودي على المستقيم $y = mx + b$ هي:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

حيث أن $(x_1, y_1) = (3, -5)$ وميل المستقيم $y + 2x + 3 = 0$ هو $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$ إذاً معادلة المستقيم هي

$$y - (-5) = -\frac{1}{-2}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y + 5 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2(y + 5) = x - 3$$

$$\Rightarrow 2y + 10 = x - 3$$

$$\Rightarrow 2y - x + 13 = 0$$