الباب الثالث: المعادلات

3.1 معادلات الدرجة الأولى

تعريف:

المعادلة عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مكتوبة على صيغة طرفين بينهما إشارة يساوي (=) وتسمى هذه المتغيرات مجاهيل.

حل المعادلة نقصد به إيجاد قيم المجاهيل العددية التي تحقق التساوي في المعادلة. أي أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر بعد التعويض بهذه القيم.

أولاً: معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد

مثال: أوجد حل المعادلة

$$3x + 7 = -5$$

الحـــــــــل

$$3x + 7 = -5$$

$$3x = -5 - 7 \quad \Rightarrow \quad 3x = -12$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-12}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$2x - 5 = 3x - 7$$

الحـــــــــــــل

$$2x - 5 = 3x - 7$$

$$2x - 3x = -7 + 5$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$3(x+2)-4(x-3)=0$$

الحــــــــــل

$$3(x+2)-4(x-3)=0$$

$$3x+6-4x+12=0$$

$$-x+18=0$$

$$-x=-18$$

$$x=18$$

حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة كسر

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{3x - 1}$$

الحـــــــــل

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{3x - 1}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(1)(3x - 1) = (2x)(1)$$

$$3x - 1 = 2x$$

$$3x - 2x = 1$$

$$x = 1$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\frac{x-1}{3}=\frac{1}{2}$$

الحـــــــــل

$$\frac{x-1}{3}=\frac{1}{2}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(2)(x-1)=(3)(1)$$

$$2x-2=3$$

$$2x=3+2 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{5}{2}$$

حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة جذر

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt{x} = 6$$

الحـــــــــل

$$\sqrt{x} = 6$$

بتربيع الطرفين

$$(\sqrt{x})^2 = (6)^2$$

$$x = 36$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt{3x-8}=1$$

الحـــــــل

$$\sqrt{3x-8}=1$$

بتربيع الطرفين

$$\left(\sqrt{3x-8}\right)^2=(1)^2$$

$$3x-8=1$$

$$3x=1+8$$

$$3x=9 \quad \Longrightarrow \quad x=3$$

مثال: أوجد حل المعادلة

$$\sqrt[3]{x-3} = -2$$

الحـــــــــل

$$\sqrt[3]{x-3} = -2$$

بتكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3 = (-2)^3$$

$$x - 3 = -8$$

$$x = -8 + 3$$

$$x = -5$$

ثانياً: معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

و هما يمثلان هندسياً خطين مستقيمين.

عند حل المعادلتين يجب دراسة الحالات الثلاث الآتية:

- الحالة الأولى: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متوازيين غير متقاطعين، وبالتالي **فإن المعادلتين ليس لهما حل**.
- الحالة الثانية: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين منطبقين، وبالتالي **فإن المعادلتين لهما عدد لا نهائي من الحلول**.
- الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة، وبالتالي **فإن للمعادلتين حل وحيد**.

مثال: هل يوجد للمعادلتين التاليتين حل؟

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$6x + 9y = -21$$

الحــــــــل

أولاً: نرتب المعادلتين على الصورة العامة.

$$2x + 3y = -7$$
$$6x + 9y = -21$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-21} = \frac{1}{3}$$

بما أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$$

إذاً الخطين منطبقين وعليه يوجد عدد لانهائي من الحلول.

ثالثاً: طرق حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

يوجد عدد من الطرق لحل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين وسنركز فقط على طريقتين وهما:

1) طريقة التعويض
2) طريقة الحذف

ملاحظة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين وتفضل الآلة الحاسبة

$$\text{Casio } \ fx-991\ ES\ PLUS$$

مثال: أوجد حل المعادلتين:

$$y - 3x = 12$$
$$y + 3x = 2$$

الحـــــــــل

$$y - 3x = 12 \qquad (1)$$
$$y + 3x = 2 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) وَ (2) نجد أن

$$2y = 14 \quad \Longrightarrow \quad y = 7$$

بالتعويض عن $y = 7$ فى المعادلة (2) نجد أن

$$7 + 3x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 2 - 7$$

$$\Longrightarrow \quad 3x = -5 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$$

إذاً حل المعادلتين هو

$$x = -\frac{5}{3}, \qquad y = 7$$

مثال: أوجد حل المعادلتين:

$$2x - 3y = 3$$
$$3x + y = 2$$

الحــــــــل

$$2x - 3y = 3 \qquad \mathbf{(1)}$$
$$3x + y = 2 \qquad \mathbf{(2)}$$

بضرب المعادلة (2) في 3 نجد أن

$$9x + 3y = 6 \qquad \mathbf{(3)}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) نجد أن

$$11x = 9 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{11}}$$

بالتعويض عن $x = \frac{9}{11}$ فى المعادلة (2) نجد أن

$$3 \times \frac{9}{11} + y = 2 \quad \Longrightarrow y = 2 - \frac{27}{11} = \frac{22 - 27}{11} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}$$

إذاً حل المعادلتين هو

$$x = \frac{9}{11}, \qquad y = -\frac{5}{11}$$

مثال على حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين باستخدام الآلة الحاسبة

مثال: أوجد حل المعادلتين:

$$x + 2y = 8$$
$$-x - 3y + 13 = 0$$

الحـــــــــــل

أولاً: نرتب المعادلتين على الصورة العامة.

$$x + 2y = 8$$
$$-x - 3y = -13$$

بعد ذلك نبدأ باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالي:

1) اضغط زر Mode

2) اضغط على رقم 5 لاختيار الخيار 5:EQN

3) اضغط على رقم 1 لاختيار الخيار $1{:}a_nX + b_nY = C_n$

4) ستظهر مصفوفة مكونة من صفين وثلاث أعمدة والمطلوب هو إدخال معاملات المتغيرين x وَ y والثوابت كالتالي من اليسار إلى اليمين

$$\mathbf{1 = 2 = 8 = -1 = -3 = -13 ==}$$

بعد ذلك ستظهر قيمة x ثم اضغط $=$ وبعدها ستظهر قيمة y .

سنجد أن حل المعادلتين هو

$$x = -2, \qquad y = 5$$