1.3 الأسس والجذور

أولاً: الأسس

تعريف:

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n عدداً طبيعياً فإن x^n تعني ضرب x في نفسها n من المرات

$$\boldsymbol{x^n = \overbrace{(x)(x)\ldots(x)}^{n\ \text{من المرات}}}$$

حيث x يسمى الأساس وَ n يسمى الأس.

مثال:

$$x^3 = (x).(x).(x)$$

$$(7)^6 = (7)(7)(7)(7)(7)(7)$$

$$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -27$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

ملاحظة 1:

إذا كان a عدداً حقيقياً وَ $a \neq 0$ فإن $a^0 = 1$.

مثال:

- $3^0 = 1$
- $(-11)^0 = 1$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
- $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{5}\right)^0 = 1$
- $0^0 \neq 1$

ملاحظة 2:

إذا كان a عدداً حقيقياً بحيث $a \neq 0$ و كان m عدداً طبيعياً فإن

$$\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

مثال:

- $(\mathbf{7})^{-\mathbf{3}} = \frac{1}{7^3}$
- $(\mathbf{-3})^{-\mathbf{4}} = \frac{1}{(-3)^4} = -\ \frac{1}{81}$
- $\boldsymbol{x}^{-\mathbf{5}} = \frac{1}{x^5}$

ملاحظة 3:

إذا كان a وَ b عددين حقيقين بحيث $a \neq 0$ وكان m وَ n عددين طبيعيين فإن:

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

مثال:

$$\frac{4^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{4^3} = \frac{25}{64}$$

$$\frac{3^{-5}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^5} = \frac{16}{81}$$

ملاحظة 4:

إذا كان a وَ b عددين حقيقين بحيث $a \neq 0$ وكان m عدداً طبيعياً فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$$

مثال:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-4} = \left(\frac{3y}{2x}\right)^{4}$$

خواص الأسس

خاصية 1:

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $0 \neq x$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإن:

$$\boldsymbol{x^n . x^m = x^{n+m}}$$

مثال:

$$\boldsymbol{x^3 . x^4} = x^{3+4} = x^7$$

$$\boldsymbol{x^{-2} . x^5} = x^{-2+5} = x^3$$

$$\boldsymbol{(3x+5)^6 . (3x+5)^4} = (3x+5)^{6+4} = (3x+5)^{10}$$

خاصية 2:

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $x \neq 0$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإن:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثال:

$$\frac{x^3}{x^8} = x^{3-8} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{9^{-7}}{9^{-11}} = 9^{(-7)-(-11)} = 9^{-7+11} = 9^4$$

$$\frac{(x-2)}{(x-2)^7} = (x-2)^{1-7} = (x-2)^{-6} = \frac{1}{(x-2)^6}$$

خاصية 3:

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $x \neq 0$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإن:

$$(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$$

مثال:

$$\left(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}} = x^{(2)(3)} = x^6$$

$$\left(\boldsymbol{x}^{-\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{5}} = x^{(-4)(5)} = x^{-20} = \frac{1}{x^{20}}$$

$$\left((\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^{-\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{2}} = (2x - 3)^{(-4)(2)} = (2x - 3)^{-8} = \frac{1}{(2x - 3)^8}$$

خاصية 4:

إذا كان x وَ y عددين حقيقين بحيث $0 \neq x$ وَ $0 \neq y$ وكان n عدداً صحيحاً فإن:

$$(\boldsymbol{x\,y})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{x^n\,y^n}$$

مثال:

$$(\boldsymbol{3ab})^{\boldsymbol{4}} = 3^4a^4b^4 = 81a^4b^4$$

$$\left(\boldsymbol{x^3y^2}\right)^{\boldsymbol{5}} = x^{15}\,y^{10}$$

$$\left(\boldsymbol{x^{-2}y^5}\right)^{\boldsymbol{-3}} = x^6y^{-15} = \frac{x^6}{y^{15}}$$

$$\left(\boldsymbol{-2x^2y^{-3}}\right)^{\boldsymbol{-3}} = (-2)^{-3}x^{-6}y^9 = \frac{y^9}{(-2)^3x^6} = \frac{y^9}{-8x^6} = -\frac{y^9}{8x^6}$$

خاصية 5:

إذا كان x وَ y عددين حقيقين وكان n عدداً صحيحاً فإن:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \frac{x^{n}}{y^{n}}\,, \qquad y \neq 0$$

مثال:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{3}{-2}\right)^{5} = \frac{3^5}{(-2)^5} = \frac{243}{-32} = -\frac{243}{32}$$

$$\left(\frac{9}{7}\right)^{-11} = \left(\frac{7}{9}\right)^{11} = \frac{7^{11}}{9^{11}}$$

$$\left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^{3} = \frac{(-2)^3\left(x^2\right)^3}{(y^3)^5} = \frac{-8x^6}{y^{15}} = -\frac{8x^6}{y^{15}}$$

ملاحظة:

1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \neq a^n + b^n$

2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \neq a^n - b^n$

ثانياً: الجذور

تعريف:

يسمى العدد x الجذر النوني للعدد a إذا كان $x^n = a$ حيث n عدد طبيعي أكبر من الواحد وَ $x,a \in R$ ويكتب :

$$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

مثال:

a) $\sqrt{\mathbf{(15)^2}} = 15$

b) $\sqrt[3]{\mathbf{27}} = 3$

c) $\sqrt[4]{\mathbf{81}} = 3$

d) $\sqrt[3]{\mathbf{-8}} = -2$

e) $\sqrt{-9}$ كمية غير معرفة

ملاحظة:

- يسمى الجذر التربيعي للعدد a $\quad x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- يسمى الجذر التكعيبي للعدد a $\quad x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

خواص الجذور

خاصية 1:

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n عدداً زوجياً أكبر من الواحد فإن:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{x^n}} = |\boldsymbol{x}|$$

مثال:

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = |x|$$

$$\sqrt[8]{\boldsymbol{x^8}} = |x|$$

$$\sqrt[4]{\boldsymbol{81}} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$$

$$\sqrt[6]{(\boldsymbol{-2})^{\boldsymbol{6}}} = |-2| = 2$$

خاصية 2:

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n عدداً فردياً أكبر من الواحد فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

مثال:

$$\sqrt[7]{x^7} = x$$

$$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$\sqrt[3]{8^3} = 8$$

خاصية 3:

إذا كان x وَ y عددين حقيقيين وَكان n عدداً طبيعياً أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\;\sqrt[n]{y}$$

وفي حالة إذا كان n عدداً زوجياً فإن x وَ y عددين موجبين .

مثال:

$$\sqrt[3]{27\,x^3} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^3} = 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$$

$$\sqrt{9\,x^2} = \sqrt{9}\,\sqrt{x^2} = 3|x|$$

$$\sqrt[5]{-7}\;\sqrt[5]{-7} = \sqrt[5]{(-7)(-7)} = \sqrt[5]{(-7)^2} = \sqrt[5]{49}$$

$$\sqrt[3]{2}\;\sqrt[3]{2}\;\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(2)(2)(2)} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[3]{8\,y^{-6}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{y^{-6}} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{(y^{-2})^3} = 2y^{-2} = \frac{2}{y^2}$$

خاصية 4:

إذا كان x وَ y عددين حقيقيين وكان n عدداً طبيعياً أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{y}}} \ , \qquad y \neq 0$$

بشرط أن تكون x وَ y أعداداً حقيقية غير سالبة في حالة n عدداً زوجياً.

مثال:

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{25x^2}}{\boldsymbol{y^2}}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{\sqrt{5^2}\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{5\,|x|}{|y|}$$

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{9x^4}}{\boldsymbol{y^6}}} = \frac{\sqrt{9x^4}}{\sqrt{y^6}} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^6}} = \frac{\sqrt{3^2}\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^3)^2}} = \frac{3x^2}{|y^3|}$$

خاصية 5:

إذا كان x وَ y عددين حقيقيين وكان n وَ m عددين طبيعيين أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

بشرط أن تكون x غير سالبة في حالة n عدداً زوجياً .

مثال:

$$\sqrt[3]{8\,x^9y^{12}} = \sqrt[3]{2^3(x^3)^3(y^4)^3} = 2x^3y^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{16\,x^4}{y^{-8}\,w^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{y^{-8}}\,\sqrt[4]{w^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{(y^{-2})^4}\,\sqrt[4]{(w^3)^4}} = \frac{2|x|}{|y^{-2}||w^3|} = \frac{2|x|}{y^{-2}\,|w^3|} = \frac{2|x|y^2}{|w^3|}$$

$$\sqrt[3]{8\,x^9y^{-6}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{x^9}\,\sqrt[3]{y^{-6}} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{(x^3)^3}\,\sqrt[3]{(y^{-2})^3} = 2x^3y^{-2} = \frac{2x^3}{y^2}$$

خاصية 6:

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n وَ m عددين طبيعيين أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\times m]{x}$$

بشرط أن تكون x غير سالبة في حالة n أو m عدداً زوجياً .

مثال:

$$\sqrt[3]{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[(3)(7)]{x} = \sqrt[21]{x}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x}} = \sqrt[(4)(6)]{x} = \sqrt[24]{x}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{125}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$$

ملاحظة:

1) $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

2) $\sqrt[n]{x-y} \neq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$