الباب الأول: مفاهيم أساسية في الجبر

1.1 مبادئ المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء المعروفة والمحددة تحديداً تاماً .

مثال:

1) تمثل حروف كلمة " قلم" مجموعة
2) تمثل الأشهر الهجرية مجموعة
3) لا تمثل الأطعمة الشهية مجموعة
4) لا تمثل المنازل الجميلة مجموعة

تعريف العنصر:

تسمى الأشياء التي تتكون منها المجموعة بعناصر هذه المجموعة ويرمز لها عادةً بالأحرف الصغيرة (مثل ... $a,b,c,x,y,z,$) بينما يرمز للمجموعات بالأحرف الكبيرة (مثل ... $A,B,C,X,Y,Z,$).

شروط كتابة المجموعة:

- نرمز للمجموعة عادةً بحرف كبير مثل $A,B,C,X,Y,Z, \ldots$.
- نكتب عناصر المجموعة بين قوسي المجموعة { } .
- نضع فاصلة بين كل عنصر وآخر.
- عدم تكرار كتابة العنصر.
- ترتيب العناصر غير مهم.

فمثلاً: نكتب مجموعة الأعداد الزوجية على شكل مجموعة كالتالي:

$$A = \{2,4,6,8, \ldots\}$$

تعريف المجموعة الخالية:

هي المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو { }.

طرق كتابة المجموعة

1- طريقة السرد (الحصر):

وتكتب فيها جميع عناصر المجموعة دون تكرار داخل قوسي المجموعة { } ويفصل بين العناصر بفواصل.

مثال:

يمكن التعبير عن مجموعة الحروف المكونة لكلمة way بطريقة السرد على الصورة

$$X = \{w, a, y\}$$

مثال:

يمكن التعبير عن الأعداد الفردية بين العددين 0 وَ 12 بطريقة السرد على الصورة

$$A = \{1,3,5,7,9,11\}$$

2- طريقة الوصف:

وتكتب فيها الصفة (أو الخاصية أو القانون) التي تحدد عناصر المجموعة داخل قوسي المجموعة { } بحيث نبدأ بكتابة x ثم : (تقرأ بحيث) ثم الصفة على الصورة

$\{x:\ x$ صفة $\}$

مثال:

يمكن التعبير عن مجموعة الحروف المكونة لكلمة $\{c,a,r\}$ بطريقة الوصف على الصورة

$\{x:\ x$ حرف في كلمة $car\}$

مثال:

يمكن التعبير عن المجموعة $\{3,5,7,\ldots,21\}$ بطريقة الوصف على الصورة

$\{x:\ x$ عدداً فردياً بين 2 وَ 22$\}$

تعريف الانتماء:

إذا كان x هو أحد عناصر المجموعة A فيقال بأن x ينتمي للمجموعة A ويرمز لهذا بالرمز $x \in A$. وإذا لم يكن x أحد عناصر المجموعة A فإن هذا يرمز له بالرمز $x \notin A$.

مثال:

إذا كان $A = \{1,2,3,5,7,8,9\}$ فإن :

1) $5 \in A$
2) $13 \notin A$

مثال:

- شهر رمضان **لا ينتمي** للأشهر الميلادية
- العدد 11 **لا ينتمي** للأعداد الزوجية
- العدد 33 **ينتمي** للأعداد الفردية

تعريف المجموعة المنتهية وغير المنتهية:

المجموعة التي تتألف من عدد محدود من العناصر تسمى مجموعة منتهية، أما المجموعة التي تتألف من عدد غير محدود أو غير منتهٍ من العناصر تسمى مجموعة غير منتهية.

مثال:

1) $\{3,5,7,21\}$ مجموعة منتهية
2) $\{1,2,3, \dots\}$ مجموعة غير منتهية

تعريف رتبة المجموعة:

رتبة المجموعة عبارة عن عدد عناصر المجموعة. ويرمز مثلاً لرتبة المجموعة A بالرمز $|A|$.

مثال:

1) رتبة المجموعة $X = \{a,y,w,m,e,t\}$ هي $|X| = 6$

2) رتبة المجموعة $Y = \{1,5,88,9\}$ هي $|Y| = 4$

ملاحظة:

رتبة المجموعة الخالية $\emptyset$ تساوي صفراً لخلوها من العناصر، أي أن :

$$|\emptyset| = 0$$

تعريف المجموعة الجزئية:

يقال أن المجموعة X هي مجموعة جزئية من المجموعة Y إذا كانت جميع عناصر المجموعة X تنتمي للمجموعة Y و يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{X \subset Y}$.

ملاحظة:

إذا لم تكن المجموعة A جزئية من المجموعة B فإننا نكتب $\boldsymbol{A \not\subset B}$.

مثال:

1) إذا كانت $X = \{1,5,7,8,9,11,12\}$ وَ $Y = \{1,7,11\}$ فإن $Y \subset X$.

2) إذا كانت $A = \{a,b,c,f,h,y,u\}$ وَ $B = \{a,f,h,r\}$ فإن $B \not\subset A$.

ملاحظة:

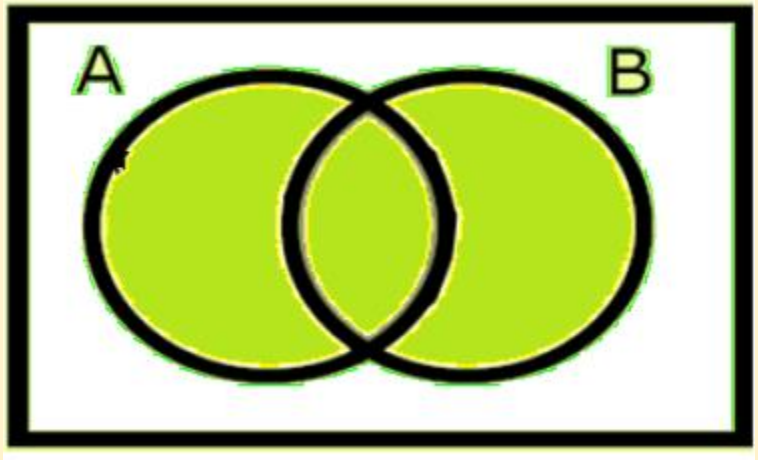
المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة .

العمليات على المجموعات

أولاً: عملية اتحاد مجموعتين

تعريف:

اتحاد مجموعتين A وَ B هو مجموعة يرمز لها بالرمز $A \cup B$، وهي المجموعة التي تحتوي على جميع عناصر المجموعة A أو المجموعة B أو كليهما.



مثال:

إذا كانت لدينا المجموعات التالية: $A = \{a,b,c,d\}$ ، $B = \{b,d,e,f\}$ ،

$C = \{e,f,g,h\}$.

فأوجد: $A \cup B$ ، $A \cup C$ ، $B \cup C$.

الحـــــل

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

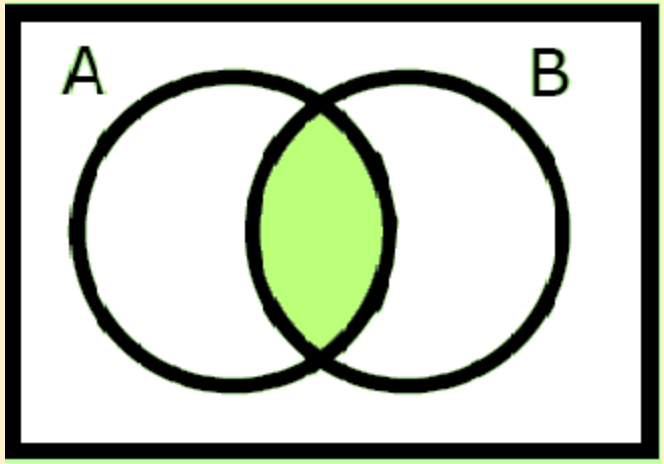
$$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$B \cup C = \{b, d, e, f, g, h\}$$

ثانياً: عملية تقاطع مجموعتين

تعريف:

تقاطع مجموعتين A وَ B هو مجموعة يرمز لها بالرمز $A \cap B$، وهي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر المشتركة بين A وَ B .



مثال:

إذا كانت لدينا المجموعات التالية: $A = \{1,2,3,5,8\}$ ، $B = \{2,5,7,10\}$ ، $C = \{1,8,15\}$.

فأوجد: $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cap C$.

الحـــــل

$$A \cap B = \{2,5\}$$

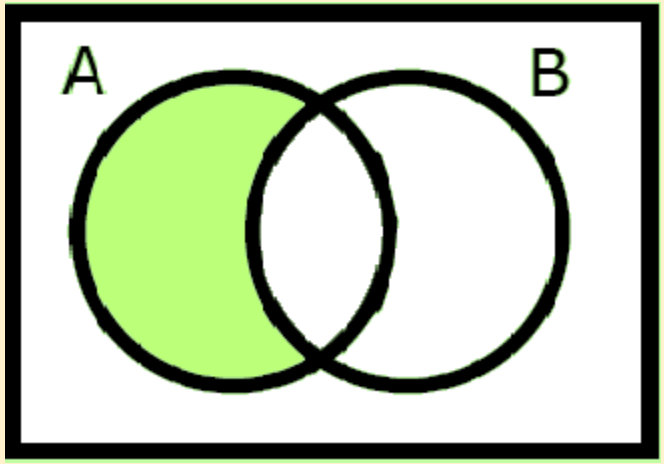
$$A \cap C = \{1,8\}$$

$$B \cap C = \emptyset$$

ثالثاً: عملية طرح مجموعة من أخرى

تعريف:

فرق المجموعتين A وَ B هو مجموعة يرمز لها بالرمز $A - B$، وهي المجموعة التي تحتوي على العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B .



مثال:

إذا كانت لدينا المجموعات التالية: $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $Y = \{1,3,5,8\}$ ، $Z = \{2,3,4,5\}$.

فأوجد: $X - Y$ ، $Y - X$ ، $X - Z$ ، $Z - X$ ، $Y - Z$ ، $Z - Y$

الحـــــل

$$X - Y = \{2,4,6\}$$

$$Y - X = \{8\}$$

$$X - Z = \{1,6\}$$

$$Z - X = \emptyset$$

$$Y - Z = \{1,8\}$$

$$Z - Y = \{2,4\}$$

رابعاً: عملية الإتمام

تعريف المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تحوى جميع العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز **U** .

مثال:

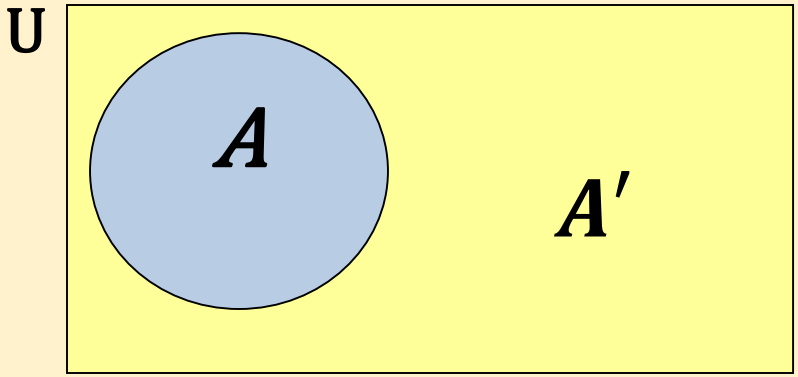
إذا كنا بصدد إجراء دراسةٍ ما تستهدف طلاب جامعة الملك عبد العزيز فإن مجموعة طلاب جامعة الملك عبد العزيز تمثل المجموعة الشاملة لهذه الدراسة وسيكون مثلاً طلاب كلية العلوم بجدة إحدى المجموعات الجزئية منها وكذلك طلاب السنة التحضيرية وهكذا...

ملاحظة:

$$\mathbf{U} \cup \mathbf{A} = \mathbf{U}$$
$$\mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

تعريف عملية الإتمام:

إذا كانت المجموعة الشاملة هي **U** فإن متممة (مكملة) المجموعة A في **U** هي المجموعة $\boldsymbol{A}$ – U و يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{A'}$.



مثال:

إذا كانت المجموعة $Y = \{1,3,11\}$ وكانت المجموعة الشاملة هي $\mathbf{U} = \{1,3,4,7,11,15\}$ فإن مكملة (متممة) Y هي

$$\boldsymbol{Y' = \{4, 7, 15\}}$$

ملاحظة:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A}' = \mathbf{U}$$
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \emptyset$$

المجموعات العددية

1- مجموعة الأعداد الطبيعية N :

$$N = \{1,2,3,4, \dots\}$$

2- مجموعة الأعداد الكلية W :

$$W = \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

3- مجموعة الأعداد الصحيحة Z :

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

4- مجموعة الأعداد القياسية (النسبية أو الكسرية) Q:

وهي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ ويمكن كتابتها على الصورة

$$Q = \left\{x: x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

ملاحظة:

ويندرج تحت هذه المجموعة مجموعة الأعداد العشرية والتي يمكن كتابتها أيضاً على صورة كسر في حالة إذا كان التمثيل العشري منتهياً أو أن يكون غير منتهٍ ولكنه متكرر، **فمثلاً:**

$$0.75 = \frac{3}{4}, \qquad 0.375 = \frac{3}{8}, \qquad 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$0.33333\ldots = \frac{1}{3}, \qquad 0.166666\ldots = \frac{1}{6}, \qquad 0.296296\ldots = \frac{8}{27}$$

5- مجموعة الأعداد غير القياسية (غير النسبية أو غير الكسرية) $\bar{Q}$:

وهي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر، **مثل:**

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$$

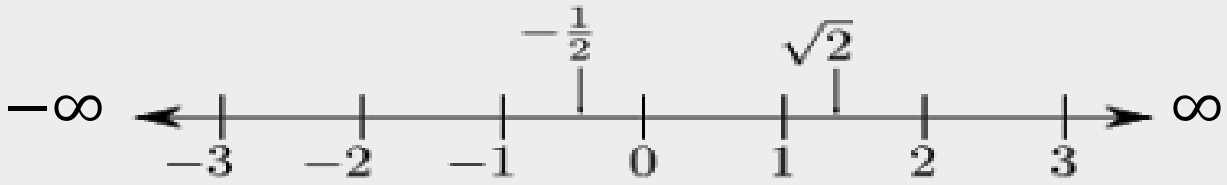
والأعداد العشرية التي لا يكون تمثيلها العشري منتهياً أو غير متكرر فهي أعداد غير قياسية (كسرية).

6- مجموعة الأعداد الحقيقية R :

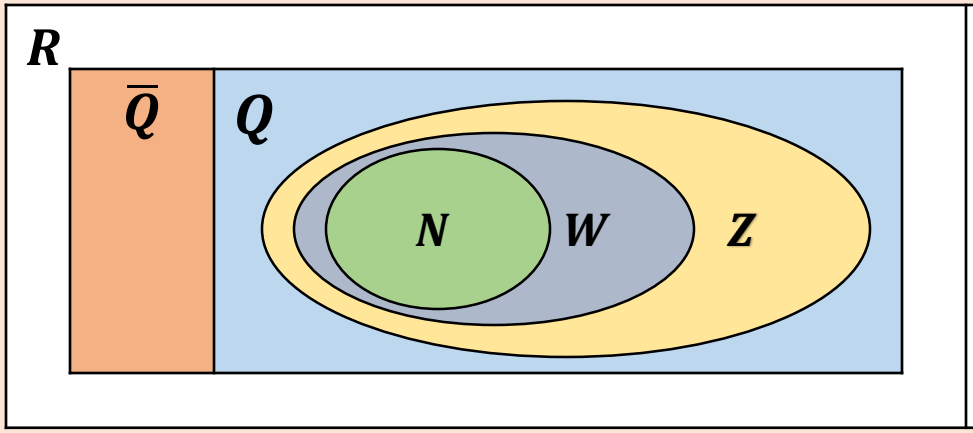
وهي مجموعة الأعداد الكسرية وغير الكسرية.

$$R = Q \cup \bar{Q}$$

وتمثل مجموعة الأعداد الحقيقية بيانياً بنقاط على خط أفقي يسمى خط الأعداد الحقيقية بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والأعداد الموجبة على اليمين والأعداد السالبة على اليسار كما في الشكل:



ملاحظة:



1) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

2) $\bar{Q} \subset R$

3) $Q \cup \bar{Q} = R$

4) $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$

الفترات العددية

تعريف الفترة العددية:

هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وتكون محدودة أو غير محدودة.
إذا كانت $a,b \in R$ بحيث $a < b$ فإن:

1- الفترة المغلقة:

$$[a,b] = \{x:\ a \leq x \leq b\}$$

مثال:

$$[2,6] = \{x:\ 2 \leq x \leq 6\}$$
$$\{x:\ -4 \leq x \leq 0\} = [-4,0]$$

2- الفترة المفتوحة:

$$(a,b) = \{x:\ \ a < x < b\}$$

مثال:

$$(-1,1) = \{x:\ \ -1 < x < 1\}$$
$$\{x:\ \ -6 < x < 3\} = (-6,3)$$

3- الفترات نصف المفتوحة أو نصف المغلقة:

$$(a,b] = \{x:\ \ a < x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x:\ \ a \leq x < b\}$$

مثال:

$$(1,7] = \{x:\ \ 1 < x \leq 7\}$$
$$\{x:\ \ -5 \leq x < 6\} = [-5,6)$$

4- فترة غير محدودة (1):

$$[a, \infty) = \{x: \ x \geq a\}$$

مثال:

$$[3, \infty) = \{x: \ x \geq 3\}$$
$$\{x: \ x \geq -2\} = [-2, \infty)$$

5- فترة غير محدودة (2):

$$(a, \infty) = \{x: \ x > a\}$$

مثال:

$$(0, \infty) = \{x: \ x > 0\}$$
$$\{x: \ x > 4\} = (4, \infty)$$

6- فترة غير محدودة (3):

$$(-\infty, a] = \{x: \ x \leq a\}$$

مثال:

$$(-\infty, 7] = \{x: \ x \leq 7\}$$
$$\{x: \ x \leq -3\} = (-\infty, -3]$$

7- فترة غير محدودة (4):

$$(-\infty, a) = \{x: \ x < a\}$$

مثال:

$$(-\infty, 1) = \{x: \ x < 1\}$$
$$\{x: \ x < -4\} = (-\infty, -4)$$

8- فترة غير محدودة (5):

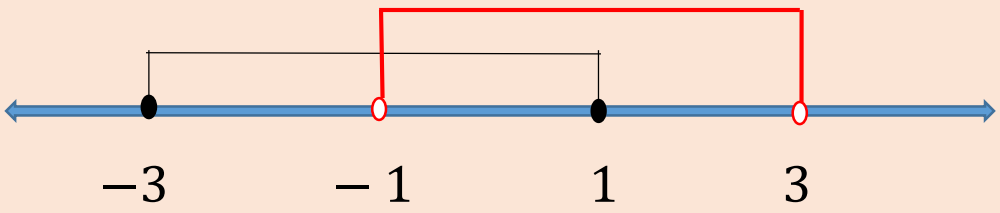
$$R = (-\infty, \infty)$$

مثال: أوجد ما يلي:

1) $(-1,3) \cup [-3,1]$

2) $(-1,3) \cap [-3,1]$

الحـــــل



1) $(\mathbf{-1,3}) \cup [\mathbf{-3,1}] = [-3,3)$

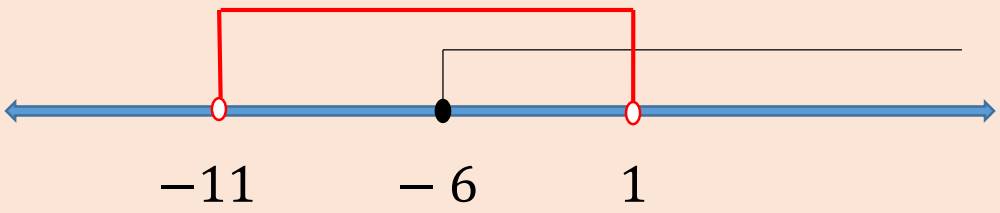
2) $(\mathbf{-1,3}) \cap [\mathbf{-3,1}] = (-1,1]$

مثال: أوجد ما يلي:

1) $[-6,\infty) \cup (-11,1)$

2) $[-6,\infty) \cap (-11,1)$

الحـــــل



1) $[\mathbf{-6},\infty) \cup (\mathbf{-11},\mathbf{1}) = (-11,\infty)$

2) $[\mathbf{-6},\infty) \cap (\mathbf{-11},\mathbf{1}) = [-6,1)$

القيمة المطلقة

تعريف القيمة المطلقة:

إذا كان x عدداً حقيقياً فإن القيمة المطلقة للعدد x يرمز لها بالرمز $|x|$ و تعرف بـ

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

مثال:

$|7| = 7$

$|-7| = -(-7)$

$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

$|1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}$

$|-1 - \sqrt{2}| = -(-1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$

$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

خصائص القيمة المطلقة:

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$

المسافة بين عددين على خط الأعداد

تعريف:

المسافة بين العددين a وَ b على خط الأعداد هي

$$d(a,b) = |a-b| = |b-a|$$

مثال: أوجد المسافة بين العددين 3 وَ -4 على خط الأعداد.

الحـــــل

$$d(3,-4) = |(3)-(-4)| = |3+4| = |7| = 7$$

مثال: أوجد المسافة بين العددين -2 وَ -11 على خط الأعداد.

الحـــــل

$$d(-2,-11) = |(-2)-(-11)| = |-2+11| = |9| = 9$$